ELEMENTOS EN EL ESPACIO DE TRABAJO EN EL PROCESO DE MODELACIÓN

Jaime Mena Lorca[1], Astrid Morales Soto
jmena@ucv.cl, ammorale@ucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Avance de Investigación
Superior

Resumen

Se presentan los elementos básicos que deben ser considerados cuando un modelador (por ejemplo un estudiante) esta en un proceso de modelación. La propuesta tiene una base teórica socioepistemológica que tiene el énfasis en el tipo de planos cognitivos que el “modelador” pone en juego para resolver su problema. La propuesta está inspirada en la Teoría de Paradigmas Geométricos y su Espacio de Trabajo; y su ampliación al Álgebra, ésta se diferencia (necesariamente) a lo desarrollado por (Kuzniak A. 2004 y Montoya, E. 2010) y de los Espacios de Trabajos Algebraicos (Mena & Morales, 2011) ya que en este caso nos centraremos en la articulación de los elementos necesarios para configurar el espacio de trabajo de modelación.

Palabras clave: *Modelación, espacio de trabajo, socioepistemología*

1. Introducción

1. 1. Las pruebas de medición en Matemáticas

Los datos del SIMCE (2009), TIMMS (2003) y de la OECD (2004) hablan expresamente de la necesidad de preocuparse de las prácticas de aula de los profesores o bien ponen inevitablemente el tema en la discusión. Por otra parte la prueba PISA mide el desempeño en matemáticas de los estudiantes de 15 años de edad en diversos países, y expresa y enfatiza determinadas habilidades que debieran ser adquiridas por los jóvenes durante su instrucción: en particular, podemos apreciar que la investigación de OECD (2007) menciona que: “PISA usa (y evalúa) el concepto de cultura matemática para referirse a la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar efectivamente la formulación, solución e interpretación de problemas en una variedad de situaciones que involucran conceptos cuantitativos, espaciales, probabilísticos o matemático” (p.51).

Además, proyectos como Tuning (consecuencia de la declaración de Bolonia 1999) surgido en Europa (Villa & Poblete, 2006) y proyectado en otras latitudes, en su versión en Latinoamericana ha propiciado también que las instituciones de educación superior de esta región se planteen currículos basados en competencias. Las carreras de Ingeniería han sido de las primeras en ser alcanzadas por esta corriente y por ende la formación en Matemáticas está siendo requerida en esos términos.

2. Problemática

Estos aspectos han hecho re-pensar la formación en Ingeniería (y en otras carreras con base científica) y está obligando a los docentes a replantear su discurso. Ya que éste, por un lado, desarrolla una matemática sin significado y carente del aspecto funcional de ellas y la manera de abordar la modelación es simplemente un ejemplo en donde la matemática es una herramienta.

[1] Fondecyt Regular 1110988

Todo esto impide el uso apropiado de las TIC ya que éstas por ejemplo sirven sólo para representar objetos matemáticos y no se concibe la tecnología para crear conocimiento.

Por otro lado aunado a lo mencionado anteriormente, la investigación de (Moreno & Azcárate 2003) muestran las necesidades en la sociedad actual, de personas más competitivas en sus trabajos, más cualificados y versátiles, capaces de especializarse durante toda la vida. Las pruebas de medición antes mencionadas (PISA, TUNING, SIMCE, TIMMS) y estudios que realiza la OECD éstas nos brindan información y la reflexión de cómo se está llevando a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Diversas investigaciones (Lara, 2007) apuntan a lo que se estima debe saber un estudiante inserto en la sociedad y en particular lo que debe saber un estudiante en ingeniería, por ello es que creemos que la modelación hoy en día es una necesidad.

3. Modelación

Es claro que las ciencias en general han apoyado su desarrollo en el uso de modelos, creando con ellos nuevos conocimientos y nuevas "realidades" que les han permitido avanzar, y realizar y responder nuevas preguntas de investigación y esto se ha hecho con distintas concepciones de lo que es un modelo. Para clarificar esta idea recurriremos a algunos autores, que se han referido al tema.

Por ejemplo tenemos la visión del biomatemático brasileño Bassanezzi (1999) quien declara que: "un modelo matemático es una aproximación conveniente de la realidad analizada y por lo tanto no encierra una verdad definitiva y esta sujeta a cambios. Este proceso dinámico de buscar un modelo adecuado como prototipo de determinadas entidades es llamado modelación matemática" (p.13).

También tenemos a Giordano (1997), quien tiene una concepción similar a la de Bassanezi, pero él considera además, gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales como parte del modelo, es decir, no sólo se restringe a objetos matemáticos.

Como situación extrema tenemos la posición de Biembengut (1997) que considera que: "un modelo matemático es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, un fenómeno en cuestión o un problema de situación real" (p. 89).

La modelación en el aula juega también un rol preponderante en la metodología constructivista para la generación de aprendizajes, en la medida que estos métodos de enseñanza se centran en el uso y/o construcción de modelos sencillos (Hestenes, 1987).

El proyecto Galileo (Morales, Mena, Vera y Rivera, 2011) sitúa la modelación en el aula como una forma de metodología de enseñanza constructivista de la física, en particular para la elaboración del material curricular, utiliza lo que se conoce en la literatura como "elicit-confront-resolve". En esta última, el diseño de los materiales se enfoca explícitamente en las dificultades conceptuales que se han reportado en la literatura como más frecuentes y arraigadas en los estudiantes de física básica, e involucra a los estudiantes activamente en la construcción del conocimiento.

En este punto- para modelación- existen varios trabajos clásicos que han abordado la temática (como por ejemplo Blum et al., 2002); todos ellos presentan a la modelación como una forma de lograr aprendizajes constructivistas. Ahora bien, desde esta perspectiva la matemática puede cumplir dos roles totalmente distintos: uno como herramienta que ayuda a construir y a entender el modelo y el otro como generación de conocimiento matemático. En relación a lo anterior, la Socioepistemología tiene la siguiente postura: la modelación norma la construcción del conocimiento y es una práctica social que genera conocimiento matemático y por lo tanto ésta debe ser parte del sistema didáctico, incluida en forma intencional en el discurso matemático escolar.

En definitiva queremos realzar que la modelación matemática debe ser utilizada para generar nuevos conocimientos de alguna área o ciencia y también debe cumplir este mismo rol en el aula para la enseñanza de la matemática (Morales et al, 2011)

Numerosos estudios plantean que para desarrollar las competencias anteriormente mencionadas es necesario introducir la modelación en la enseñanza de las matemáticas. Como un ejemplo a mencionar, Blum & Niss (1991) dan cinco argumentos a favor de introducir la modelación en el sistema escolar que son: argumento formativo, argumento de competencia crítica, argumento utilitario, argumento imagen de la matemática y argumento de promoción del aprendizaje de las matemáticas.

4. Matemática utilitaria versus matemática funcional

4.1. El discurso matemático escolar (DME)

Los matemáticos y profesores de matemáticas son (en teoría) los primeros actores en el proceso de la enseñanza de las matemáticas pero la evidencia muestra que esto no es tan así y uno de los elementos diferenciadores fundamentales está en concebir la matemática como una herramienta o la matemática en su aspecto funcional (Cordero, 2008).

Investigaciones en la disciplina de la Matemática Educativa bajo la perspectiva de la Socioepistemología sostienen que el discurso matemático escolar[2] (DME) no es adecuado ya que carece de significado y la manera en que abordan los temas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no genera conocimiento.

La Socioepistemología atiende la construcción social del conocimiento matemático y aborda esta construcción con una mirada crítica al DME actual resaltando el hecho de que éste se centra en los conceptos matemáticos y no en las categorías que están sustentadas por prácticas sociales que generan conocimiento, de manera tal que conduce a la matemática a un nivel utilitario y no funcional[3], agudiza su postura manifestando que en la actualidad se manejan los contenidos de manera separada, carentes de interacción y significado, provocando que el proceso de adquisición del conocimiento se logre de manera particionada (Morales, 2009), proceso que no ayuda al entendimiento y confección de modelos, es por eso que nuestro objetivo es buscar mecanismos que provoquen vincular los contenidos con el fin de lograr la construcción de conocimiento matemático asociados a un modelo.

[2] El discurso matemático escolar es la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la enseñanza y lo que es la matemática. Discutimos un poco más al respecto en la sección 'Estatus del uso de las gráficas en los libros de texto' de este artículo

[3] Matemática funcional quiere decir un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad. Todo ello en oposición al conocimiento utilitario.

La Socioepistemología plantea rediseñar el discurso matemático escolar (RDME) de tal forma que se logre dar otro enfoque basado en las prácticas sociales como generadoras de conocimiento y para ello es necesario que la matemática tenga un nivel funcional y la importancia de ello en el discurso. Un constructo teórico de esta postura didáctica es la resignificación[4], si se resignifican los objetos matemáticos no sólo se da otra mirada ni otro significado sino más bien es algo que permite "movilidad", cambiar a otros dominios; eso hace que la matemática sea funcional, que cobre vida, que tenga significado dentro y fuera del aula. Ahora la pregunta natural que surge es ¿Quién hace que la matemática sea funcional? ¿El profesor? ¿El discurso? ¿Qué lo provoca? Creemos que todo esto lo permite la modelación.

Una de las categorías que ha creado la Socioepistemología es la modelación-graficación. Por ejemplo podemos ver el trabajo de Suárez (2008) quien postula que la graficación-modelación es una categoría que está conformado por tres elementos:

a) Los datos epistemológicos de la modelación del movimiento
b) Los elementos propios de la modelación-graficación (realizaciones múltiples, identificación de parámetros, realización de ajustes, desarrollo del razonamiento)
c) Las argumentaciones conformadas por significados, procedimientos y procesos

Este binomio cobra mayor importancia con la validación que tiene la tecnología (Morales, 2009) en los estudiantes –no ocurre de igual manera con el DME– y que podrían ser utilizada apropiadamente por los profesores en el proceso de enseñanza, especialmente en los procesos de modelación.

4.2. Antecedentes de datos recogidos de una situación sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

En una investigación realizada con el objetivo de ver el rol de los gráficos en un ambiente de modelación nos percatamos del efecto que tiene la formación en otra disciplina específica que tiene el estudiante ante la tarea de modelar. Esta se expresa claramente en la interpretación de las gráficas que tienen y en los tipos de argumentaciones que utilizan. En ellos predominan los paradigmas de la comunidad local a la que pertenecen y estas "verdades" compartidas las usan sinérgicamente con sus "verdades" matemáticas (plano cognitivo matemático), específicamente la manera de abordar la situación planteada es diferentes frente a estudiantes de matemáticas y de física.

La investigación anterior y otras han sido realizadas en la Socioepistemología que han manifestado este aspecto. En definitiva podríamos decir que el estudiante pone sinérgicamente distintos planos cognitivos para construir nuevos conocimientos (Montoya, 2010 y Mena, 2011).

La importancia de esta mirada tiene especial relevancia en situación de modelación puesto que en el proceso de modelar no consiste en un proceso de transposición de un saber matemático, pero aún ya que el proceso de modelación por un lado trastoca el saber matemático (postura socioepistemológica) quedando este ligado a la situación específica planteada. Por otro lado, pensando en el rol de la matemática en las ciencias este saber matemático debe quedar ligado a un nivel funcional tal que el sea movilizado apropiadamente a otros modelos.

[4] Resignificar quiere decir la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, es decir, será el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma de acorde con lo que organizan las participantes. (Cordero, 2008).

La evidencia muestra que el estudiante puede entender un modelo sin pasar por lo que es matemáticamente, actúan las ideas que tienen ellos. Diferencia al enfrentar el problema los matemáticos y los físicos, cuál es su matemática funcional y/o su cotidiano

5. Conformación del marco

En una situación de modelación el estudiante recurre a los conocimientos que tiene, entendiendo esto como el "conocimiento" de la matemática que utilizará, el conocimiento de otros dominios que nosotros denominaremos Espacio de trabajo en modelación (en alusión a las ideas de Alan Kuzniak y Houdement, 2006) y posteriormente la generación de espacio de trabajo algebraico (Mena & Morales, 2011). Para entender esto recurrimos a la definición original de Espacio de Trabajo.

Houdement y Kuzniak (2000, 2006) y Kuzniak (2004) replantean la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, pues ofrecen elementos para que el alumno (y el profesor) construyan un espacio de trabajo apropiado para enfrentar un problema geométrico: la interpretación de los problemas, la forma de abordarlos y la reflexión en torno a ellos permiten distinguir tres tipos de geometrías o paradigmas geométricos, provistos cada uno de un espacio de trabajo geométrico-ETG.

Estos autores definen el Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) como *el* ambiente se concibe la reflexión como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas geométricos, es un ambiente organizado por y para el geómetra[5] mediante la articulación de tres componentes, a saber: el modelo geométrico, el espacio local y real y los artefactos.

Claramente en el aula (en clase de Matemáticas) está presente el contrato didáctico y las componentes teóricas (en ETG y ETA) en el caso de la modelación no son fijas ya que el centro es la modelación y no la transposición de un contenido matemático específico (ver figura 1)

El modelador recurrirá a distintos planos cognitivos (según ETG, ETA) de acuerdo a la matemática que involucre, y prioritariamente serán los contenidos matemáticos que estén a nivel funcional para el modelador.

Con relación a las componentes paradigmáticas, en el caso de la modelación, el modelador recurrirá a conocimientos de otros dominios (mecánica, física, economía, etc.) que sin duda son validos para él y no necesariamente para el dominio que esté utilizando (plano cognitivo del dominio, ver figura 2). Es decir, estos conocimientos están a un mismo nivel cognitivo al que nos referimos como contenido matemático.

En la búsqueda de estudiar el *espacio de trabajo de modelación* de un individuo, se hace necesario ubicar dos mundos, uno que se refiere a un individuo (ciudadano) fuera del aula (ver figura 1) donde se muestra que ante una situación de modelación el individuo puede recurrir si así lo desea a distintos dominios con una misma ponderación y eso filtrado por el proceso cognitivo (óvalo que rodea a la modelación), es decir, si fuera el caso del concepto físico, la verdad de este concepto depende de cómo el modelador lo concibe y éste puede estar distante del concepto físico propiamente tal. Lo mismo ocurre con los contenidos matemáticos.

[5] Individuo que trabaja un problema geométrico, puede ser un estudiante, profesor o investigador.

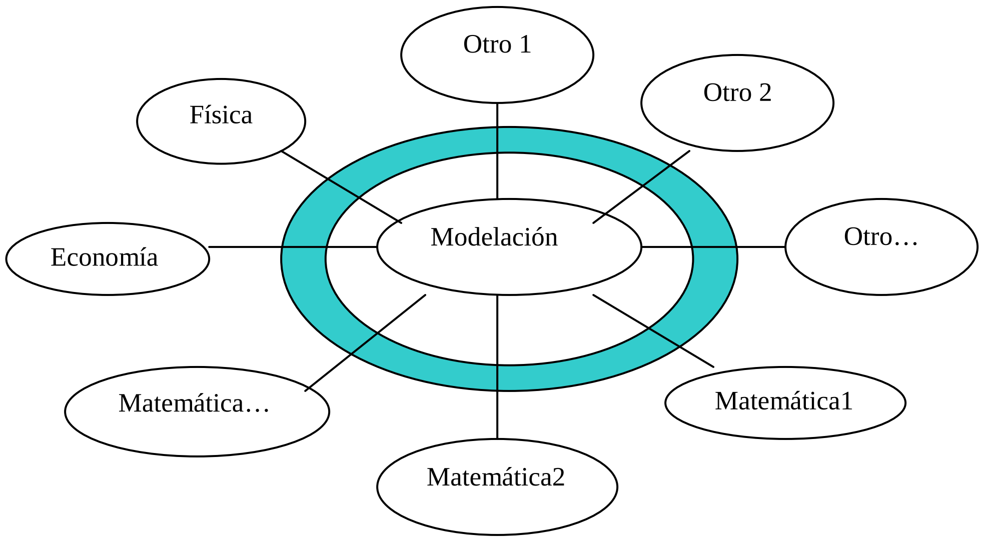

Figura 1: Situación de modelación fuera del aula

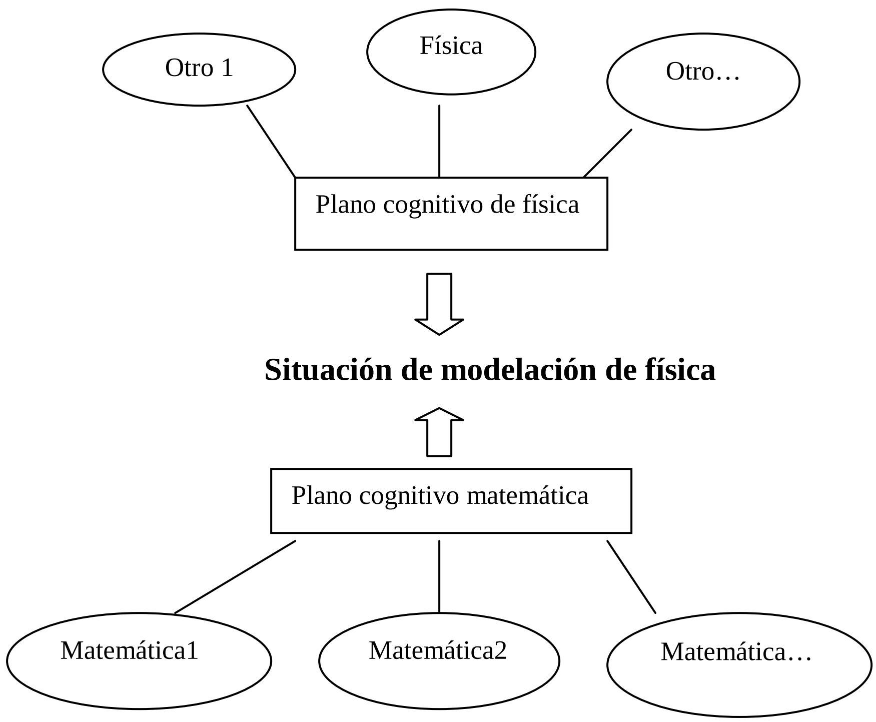

Figura 2: Situación de modelación en el aula

El otro mundo tiene que ver con un individuo dentro del aula (ver figura 2). En este caso, el individuo está en una actividad matemática que a su vez está enmarcada en un sistema de enseñanza-aprendizaje con contrato didáctico implícito, en la que probablemente se está tratando un tema específico de la matemática, es así que el modelador sabe o está mandatado a poner en juego una matemática y una ciencia en particular. De esa manera (ver figura 2) el peso específico de una matemática y de un dominio es superior a las otras matemáticas y otros dominios.

Es por esto que en ambos mundos, tanto fuera del aula como en el aula se requiere una matemática funcional, el *espacio de trabajo de modelación* lo requiere siempre; y a pesar que en el aula está el contrato didáctico presente de alguna manera es importante hacer la distinción que la modelación es transversal y eso le da mas riqueza ya que permite movilidad a diferencia de un tema específico matemático a enseñar.

6. Conclusiones

En general, el proceso de modelación, no es asumido por los profesores de matemática en las carreras de ingeniería, esto se debe principalmente a los siguientes elementos: a) desconocimiento de la complejidad del proceso de modelación y b) inseguridad del profesor en temas de otras disciplinas.

La complejidad del proceso de modelación obliga al modelador articular los elementos matemáticos que pone en juego con un objetivo distinto a los procesos matemáticos habituales en la matemática. Es así que él en una situación de modelación fuera del aula articulará elementos de distintos ámbitos con aquellos de la matemática que la situación lo requiera, en el caso del aula, por ejemplo en un curso de Cálculo Integral el modelador recurrirá principalmente, en este caso, a aquella matemática que está siendo tratada, disminuyendo considerablemente los elementos exógenos a la matemática. Esto se contrapone con lo que se demanda de la enseñanza de la matemática, desde las ciencias, en particular de la ciencia de la ingeniería vemos que esta enseñanza se ha centrado en los conceptos matemáticos asumiendo que el alumno hará la conexión necesaria, justificando aquello con el hecho de que al citar ciertos “símbolos” deben ser entendidos puesto que también éstos aparecen en física, química, termodinámica, etc, es decir, como es un lenguaje usado en diferentes dominios de manera natural el estudiante debe conectar y entender de que se trata.

Desde el punto de vista Socioepsitemológico cabe destacar el rol de la matemática funcional en el discurso matemático escolar y cómo éste puede lograr generar conocimiento que hoy en día por la forma que se están tratando los temas a enseñar no se está pesquisando realmente los que se está enseñando ni aprendiendo. La modelación inserta de manera intencional en el sistema didáctico debería dar cabida a la construcción de conocimiento y lo que de ello se desprende, por ejemplo, el rol de las gráficas justamente en un proceso de modelación.

Entonces se hace necesario analizar, en un proceso de modelación, los elementos que el modelador utiliza y cómo articula los saberes que pone en juego para poder determinar cómo se construye el espacio de trabajo y cómo éste puede ser modificado con las acciones del profesor.

7. Referencias

Bassanezi, R (1999). Modelagem matemática. Uma disciplina emergent nos programas de formacao de professores.

Blomhoj, M. (2004). Mathematical modelling- A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education. Suecia.

Blum, W et al. (2002) ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education. Discussion documents. *Educational studies in Mathematics*, 51(1-2), 149.171.

Cordero, F. (2008). *El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica*. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Giordano F., Weir M., Fox W. (1997) *A first Course in Mathematical Modeling*. Second Edition. Brooks/Cole Publishing Company.

Hestenes, D. (1987). Toward a Modeling. *Theory of Physics Instruction. Am. J. Phys*, *55*, 440-454.

Houdement. C, Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *11*, 89-116. Irem de Strasbourg

Houdement. C, Kuzniak, A. (2000). Formation des maítres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *20*(1), 89-116. Ed La Pensée Sauvage. Grenoble

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note pour l'habilitation à diriger des recherches, Irem Paris 7.

Leal, S. (1999). *Modelacao matemática uma proposta metodológica para o curso de economia*. (Tesis de maestría no publicada). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.

Montoya, E. (2010). *Etude de la transformation des connaissances géométriques Dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili.* (Tesis doctoral no publicada). Université Denis Diderot Paris-7, Francia.

Morales, A. & Mena. A. (2011). *Elementos para una aproximación epistemológica a un 'espacio de trabajo' algebraico.* Comunicación aceptada XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, CIAEM 2011.

Morales, A., Mena. A., Vera, F., Rivera, R. (2011). *El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos.* Artículo (en revisión) Revista de Enseñanza de las Ciencias.

Morales, A. (2009). *Resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento: de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones*. (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-Unidad Legaria, México.

Moreno, M., Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemática acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, *21*(2), 265-280.

Organisation for Economic Co-operation and Development [OCDE] (2007). *PISA 2006: Science Competencies for Tomorrow´sWorld Executive Summary*, 55. Retrieved October 13, 2008, from http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, Una categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*. (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Villa, A.& Poblete, M. (Eds.). (2006). *Aprendizaje basado en competencias. Una propuesta para la evaluación de las competencias genéricas*. Editorial Mensajero.